Devoir sur Table 3

Durée : 4h

1. Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
2. Tous les documents sur papier sont interdits.
3. Les calculatrices ne sont pas autorisées.
4. Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
5. La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
6. Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
7. Mettez en évidence vous résultats en les encadrant ou les soulignant.
8. Conformément au règlement de la Banque PT
   — Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
   — L'usage de stylo à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

Exercice 1

(D'après Ecricome 2020)

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels. Si la série numérique de terme général u_n converge, on dit qu'elle converge à l'ordre 1 et on note alors $(R_{1,n})_{n\geqslant 0}$ la suite de restes de cette série, autrement dit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad R_{1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Si à nouveau la série de terme général $R_{1,n}$ converge, on dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre 2 et on note $R_{2,n}$ la suite de reste de cette série, autrement dit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad R_{2,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k}$$

Plus généralement, pour tout entier $p \geqslant 2$, si la série de terme général $R_{p-1,n}$ converge, on dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre p et on note alors $(R_{p,n})_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de restes de cette série :

$$R_{p,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p-1,k}$$

On peut noter : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_{0,n} = u_n$ Le but de cet exercice est d'étudier, sur certains exemples, l'ordre de la convergence de la série de terme général u_n.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère, dans cette question seulement, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$
   (a) Rappeler la condition nécessaire et suffisante sous laquelle $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

   On se place désormais sous cette condition.

   (b) Pour tout entier $k \geqslant 2$, justifier que

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

(c) En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$

$$\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant R_{1,n} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

(d) En déduire que

$$R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

(e) Sous quelle condition nécessaire et suffisante sur α la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge-t-elle à l'ordre 2 ?

(f) Conjecturer à quel ordre la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

2. On considère, dans cette question seulement, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n^n}$

(a) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

(b) Montrer que, pour tout $k \geqslant 3$, $u_k \leqslant \dfrac{1}{3^k}$, puis en déduire que, pour tout $n \geqslant 2$

$$0 \leqslant R_{1,n} \leqslant \frac{1}{2.3^n}$$

(c) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre 2 et que, pour tout $n \geqslant 1$

$$0 \leqslant R_{2,n} \leqslant \frac{1}{4.3^n}$$

(d) Montrer que, pour tout $p \geqslant 2$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre p et que, pour tout $n \geqslant 1$

$$0 \leqslant R_{p,n} \leqslant \frac{1}{2^p.3^n}$$

(e) La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} R_{n,n}$ converge-t-elle ?

3. On considère, dans cette question seulement, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}$

(a) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

(b) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t = 0$$

(c) Soit $N \in \mathbb{N}$, en remarquant que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{k+1} = \displaystyle\int_0^1 t^k\,\mathrm{d}t$, montrer que

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

(d) En déduire que, pour tout $n \geqslant 0$

$$R_{1,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

(e) Montrer par récurrence que, pour tout entier $p \geqslant 1$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_p$ converge à l'ordre p et que, pour tout $n \geqslant 0$

$$R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p}\,\mathrm{d}t$$

Problème
(Banque PT Maths A 2009)

Dans tout le problème, n est un entier strictement positif, E désigne un espace vectoriel réel de dimension finie n, $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E, Id_E l'identité de E et $0_{\mathcal{L}(E)}$ l'endomorphisme nul sur E.

Partie I

1. Dans cette question, E est de dimension 2. On considère la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de E. On considère l'application linéaire f ayant pour matrice, dans la base $\mathcal{B}$:
$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$
   (a) Montrer que f est un projecteur. Quel est son rang ?
   (b) Déterminer le noyau et l'image de f
2. Dans cette question, E est de dimension 3. On considère la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E. D désigne la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\varepsilon_1 = e_1 + 3e_2 - e_3$ et P le plan engendré par les vecteurs $\varepsilon_2 = e_1 - e_3$ et $\varepsilon_3 = 2e_1 - e_2$.
Déterminer la matrice, dans la base $\mathcal{B}$, du projecteur sur P parallèlement à D.
3. L'espace vectoriel E est désormais muni d'un produit scalaire $< \, , \, >$.
La norme du vecteur $x \in E$ est notée $||x||$.
Enfin, le sous-espace orthogonal d'un sous-espace vectoriel F de E sera noté $F^\perp$.
On rappelle qu'un projecteur de E est dit orthogonal lorsque son noyau et son image sont orthogonaux. Soit p un projecteur de E.
   (a) Montrer que si p est un projecteur orthogonal alors :
$$\forall u \in E, ; \qquad \|p(u)\| \leqslant \|u\| \qquad\qquad (\star).$$
   (b) Montrer que si $(\star)$ est vérifiée, alors p est un projecteur orthogonal.

Partie II

On considère ici l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre $n \geqslant 2$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{Tr}(A)$ la somme des coefficients de la diagonale de A et $A^\top$ la matrice transposée de A.

On définit l'application φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ par :
$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \quad \varphi(A, B) = \mathrm{Tr}(A^\top B).$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que
$$\left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right| \leqslant n \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}.$$
3. On note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{S}_n$ sont deux sous-espaces orthogonaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. On note Φ la norme associée au produit scalaire φ.
Soit U une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Exprimer $\Phi(MU)$ en fonction de $\Phi(M)$.
5. On considère dans cette question **uniquement** que $n = 2$. On désigne par F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :
$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$
   (a) Donner une base de $F^\perp$.
   (b) Déterminer la matrice A', image de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, par la projection orthogonale sur F.

Partie III

On considère l'application ψ de $\mathbb{R}_3[X]^2$ dans $\mathbb{R}$:

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_3[X]^2, \quad \psi(P,Q) = \sum_{i=0}^{3} P(i)Q(i)$$

1. Montrer que ψ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Soit $F = \mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$.
   (a) Calculer $\psi(1,1)$, $\psi(1,X)$, $\psi(1,X^2)$, $\psi(X,X)$, $\psi(X,X^2)$ et $\psi(X^2,X^2)$.
   (b) On note $\mathcal{B}' = (P_0, P_1, P_2)$ la base orthonormale de F telle que :
   $$\forall k \in \{0,1,2\} \quad \mathrm{Vect}(P_0, .., P_k) = \mathrm{Vect}(1, .., X^k) \quad \text{et} \quad \psi(P_k, X^k) > 0.$$
   Déterminer explicitement les polynômes P_0, P_1 et P_2.
3. Soit $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (1, 3, 2, 3)$.
   On considère l'ensemble des sommes $\Sigma = \left\{ \sum_{i=0}^{3} (x_i - P(i))^2, P \in F \right\}$.
   (a) Montrer qu'il existe un polynôme R et un seul, de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que :
   $$\forall i \in \{0,1,2,3\}, \quad R(i) = x_i$$
   (b) Déterminer le projeté orthogonal du polynôme R sur le sous-espace vectoriel F.
   (c) Montrer alors que l'ensemble Σ possède un minimum atteint pour un polynôme $S \in F$ et un seul. Déterminer ce minimum.